

# 算 数 科

松 島 修  
藤 森 慎 一  
中 西 清 二

## はじめに

私たち算数科では、自分自身で、「なぜ」とこだわりを持ち、根拠を自分なりに明らかにしながら、限界まで粘り強く考えて、自分の考えを確かなものにしていける子どもをめざしている。

このような子どもを育てるために、教科として、「何を」「どのように」指導すればよいかを研究することは重要である。

算数科では、これまで「何を」価値あるものとして子どもに教えていくべきかに重点をおいて教材研究を進めてきた。というのも、子ども達に指導するにあたり、「この指導内容は数学的にどのような価値があるか」また「その価値に基づくならば、指導は本来どのようにあるべきか」という素朴な問いが私たちにあったからである。

そして、これまでの研究において、次の教材について、その指導を考えることができた。

### ・分数（3年～6年）

分数の本質は二量の関係を表す比にあるという立場で新たに指導体系を組むことができた。

### ・図形の合同・相似（5年・6年）

「同じ形」に見える二つの図形の関係を、図形を点の集合ととらえ、対応する二点の距離の比でとらえさせる指導体系を組むことができた。

しかし、如何に教材の研究が十分になされようとも、それが現実に授業にのせることができ、子どもの身についていくものになるように単元構成されなければ意味がない。つまり、単元を通して子どもの意識にそうように「どのようにして」指

導を組むかということが吟味されなければならないのである。このことは、研究を進めれば進めるほど、私たちが忘れてはならないことであることを痛感してきた。しかし、まだまだ十分とは言えないのが現実であった。

そこで、昨年度より、全体理論を受け、「何を」を生きて働く力の研究ととらえ、「どのように」して身につけさせるかを主体者としてかかわる学習の研究であると位置づけ、研究を進めてきた。

以下、本年度の研究の重点として取り組んできた、生きて働く力について教科として明確にすること、さらに子どもの意識を考えた三段階の構成をすることについて述べていくことにする。

## I 算数科における生きて働く力

子ども自らが自己の可能性を切り拓いていけるようになるには、教科としてどのような知識・技能をこそ身につけさせていかなければならないのであろうか。

私たちは、教科の生きて働く力を明らかにするために、そもそも教科として何をめざすべきなのか（教科の本質）について、今一度考えていくことにした。なぜなら、教科の本質が明確にとらえられれば、教科としてめざすべきことの実現のために必要な知識・技能として教科の生きて働く力を明らかにすることが出来ると考えたからである。

### 1 教科の本質

教科の本質をとらえていくために、私たちは、次のような問いから出発した。

『何のために算数（数学）を教えるのか』

この問いは、算数・数学教育において常に古くて新しい問いとして私たちに掲げられてくるものである。

まず、第一に考えられるのは、日常生活において必要な知識・技能であるからということが挙げられよう。

しかしながら、日常生活に必要な知識・技能としての内容であるなら、現行の第四学年くらいまでの指導内容で十分である。従って、日常生活をしていくために必要な知識・技能を与えるという意義を認めたくて、さらに算数・数学教育の意義を求めなければならない。

では、算数・数学教育においてめざすべきことは何であろうか。

私たちは、算数・数学を教えることを通して考える力を伸ばすことこそが重要ではないかと考える。すなわち、単に算数・数学における知識・技能を身につけるだけでなく、その過程において含まれる見方・考え方を身につけることにより、考える力を伸ばすことに算数・数学教育の意義があると考えるのである。

このような考え方については、次のような論説がなされていることから方向としては認められるものと考えられる。

菊池兵一氏は、算数・数学教育の目的についての論説において次のように述べている。

『現代において人間性を確保するための教養として必要と思われるものは、単に「知識や技能の習得」にあるのではなくて、「人間として必要な知識の獲得の仕方」や「人間らしく生活するための知恵」を身につけることに力点が置かれている……「人間らしく生活するための知恵」を算数の中に求めるとしたら、それは数学的な考え方がそれである……』

また中島健三氏は次のように述べている。

『現在の数学教育を、さらには、これから先の数学教育の目的を考えると、特定の数学的な知識や技能を少しでも多く能率よく習得させるというねらいにたって数学教育を考えるよりは、むしろ、算数なり数学にふさわしい創造的な活動を体験させ、それを通して創造的に考察し処理する能力や態度をのばすようにすることが、しだいに重要な意味を持つてきることが分かる。数学教育の目標に関して、こうした精神的能力の陶冶についてのねらいを表した言葉が、従来から用いられている数学的な考え方の育成という表現である。』

上に引用した菊池、中島両氏の論説にみられるように、単なる知識・技能の習得に価値をおくのではなく、そこに潜む見方・考え方である数学的な考え方を身につけて考える力を伸ばすことに価値があると私たちは考えるのである。

但し、算数・数学を教えさえすれば考える力がつくなどと安易に考えているわけではない。

かつて、数学は論理的に構成された学問であるから、数学を教えれば論理的に考えることが出来るようになると考えられていた時期もあるが、算数・数学教育の歴史を眺めれば、必ずしもそれは期待できないことが示されている。（ユークリッド幾何学を公理から順を追って形式的に教えれば論理的に考えることが出来るようになる……とは限らない）

私たちは、考える力を伸ばすには、それにふさわしい算数・数学の指導が考慮されねばならないと考える。そのためには、算数・数学をすでに出来上がったものとして形式的に教えるのではなく、知識・技能の体系が出来上がっていく過程、子どもにとっては、算数・数学を創っていく過程を重視した指導がなされなければならないのである。

このことについては、杉山吉茂氏も考える力を伸ばすことを算数教育の意義として挙げながらも次のように述べている。

『算数・数学を学習させさえすれば、考える力がつくと安易に考えてはならないが、適切な指導をすれば考える力、学ぶ力を育てることは可能なのであるから、考える力がつくように指導したい。……算数・数学がその可能性をもっていることを前提に、考える力が伸びるような教育を行うようにしたいものである。……』

そして、考える力のもとには、豊富な知識と推論

する力なのであるから、算数・数学は推論する力を伸ばす教材として、果たす役割は大きいとも杉山氏は述べている。

つまり、算数・数学を教えることを通して、推論すること、言い換えれば、論理的に考えを進めることを身につけさせていくことが最も重要であると指摘しているのである。

このように、『何のために算数（数学）を教えるのか』の問いを出発点として、算数・数学教育の意義について考え、私たちが到達した教科の本質は次の通りである。

**数理の世界において、論理的に考えを進めること**

## 2 教科の生きて働く力

ここでは、前節で述べた教科のめざすべきこと（本質）を実現させていくために必要な知識・技能について考えることにより、教科の生きて働く力を明らかにしてみたい。

数理の世界において、論理的に考えを進めていけるようになるためには、どのような知識・技能が必要であろうか。

私たちは、数学的な知識・技能を身につけることが必要であると考え。数学的な知識・技能を確かなものに形成していく過程にこそ論理的に考えを進める場面があると考えからである。

では、数学的な知識・技能の形成の過程において論理的に考えを進めるとき、どのような考えが必要なのであろうか。

私たちは、公理的方法の考えこそが必要であると考える。

公理的方法の考えとは、「根拠を探る」とことと「仮設をおいて考える」とことである。

「根拠を探る」というのは、「～と言えるのは、どうしてなのか」と、現象や知識（考え）の根拠をあくまでも問い続け、根拠を明らかにしていくことである。そして、その結果、より確かに現象や知識（考え）や技能を理解することができるのである。

「仮設をおいて考える」というのは、「もし～としたら、どうなるか」ともとを仮設（仮定）し、その結果、どのような論理が得られるかと実在の

如何を問わず進めてみることである。そして、仮設をおいて考えることにより、さらに発展させて新たな知識（考え）や技能を創り出すことができるのである。

このように、「根拠を探る」ことにより、数学的な知識・技能をより確かなものとして理解することができ、「仮設をおいて考える」ことにより、さらに発展して新たな数学的な知識・技能を形成することができるのである。だからこそ、公理的方法の考えが数学的知識・技能を形成していく際に必要であると考えるのである。

そして、公理的方法の考えに基づいて数学的知識・技能を形成していくことの経験から、論理的に考えを進めていくことができるようになるものととらえている。従って、私たちは、教科の本質を実現していくためには、「公理的方法に基づいて考えて進めることによって数学的な知識・技能を身につけることが大切である」と考える。

そこで、教科の生きて働く力を次のように規定することにした。

公理的方法に基づいて考えを進めて  
得る数学的な知識・技能

## 3 単元の生きて働く力を設定するために

教科に生きて働く力が明らかになったとき、単元における生きて働く力はどのような観点で設定したらよいだろうか。

まず、単元における数学的な知識・技能についての価値の吟味が必要であろう。また、その教材について、子ども達が公理的方法に基づいて考えていくことが実際可能なのかについても吟味がなされねばならないであろう。

そこで、私たちは単元の生きて働く力を次の二点から考えて設定することにした。

- ・教材の数学的な価値
- ・子どもの論理の可能性

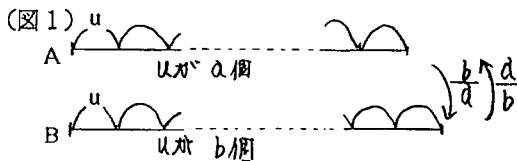
以下、二つの観点について、分数の指導（分数のたし算・ひき算－４年）を例にして具体的に述べてみる。

### (1) 教材の数学的な価値

単元の目標である生きて働く力を設定する際、

教材にどのような数学的な価値があるかをとらえておくことは大切なことである。なぜなら、算数・数学において与えるべき知識・技能は、多少の教えにくさがあっても、数学的な価値に則ったものでなければならないと考えるからである。

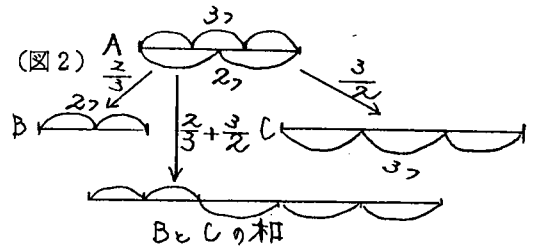
分数教材の数学的価値を考えてみよう。そもそも数学的には分数とは、(正の)有理数のことに他ならない。有理数の数学的な意味は、関係概念である比(ratio)にある。これは、有理数を英語でrational numberということからも明らかである。従って、分数の本質は、二量の関係概念である比にあるということになる。この意味するところは、下の図1のように、二量A、Bについて、A、Bが共通の単位uでa個分、b個分であるとき、(AとBはa個とb個：いくつといくつ) BはAの $b/a$ (あるいは、AはBの $a/b$ )というように分数が二量の倍関係を表すことにある。



ところが、現行の指導体系においては、分数は単位量に満たない端下の量を表すものとして導入され、分数の本来の意味の二量の関係概念としてのとらえは第6学年まで示されない。けれども、端下の量表現を目的とするなら、整数の拡張としての小数(10等分、さらに10等分……と下位の単位をつくっていくことによりできる世界)を導入すれば十分である。

私たちは、分数の本来の意味である二量の関係概念である比(“いくつといくつ”)に基づいた指導が、導入からなされねばならないと考える。つまり、分数を二量の倍関係を表すものとして導入し、同値関係、大小関係、演算などの関係を入れていくことにより数としての構造をつくっていくべきであると考えるのである。

このような立場に立ったとき、分数のたし算・ひき算は、倍の和・倍の差を表すものとして位置づけられる。倍の和は、 $2/3 + 3/2$ を例にすると具体的には図2のようになる。



つまり、もとの大きさ(A)の $2/3$ 倍の大きさ(B)と $3/2$ 倍の大きさ(C)の和(B+C)が、もとの大きさ(A)の何倍かを表すことになるのである。倍の差については、ひき算は、たし算の逆算であるので、上の図において、AとBの倍関係か、AとCの倍関係のいずれかが?のときの関係として倍の和に帰着できると考えられる。

従って、教材の数学的な価値から、生きて働く力は次のようにみえてくる。

「倍関係を表す分数のたし算の意味を知り、ひき算をたし算の逆ととらえて和や差を求めることができる」

この生きて働く力は、後続する分数のかけ算・わり算においても倍の積を“いくつといくつ”ととらえたり、わり算をかけ算の逆算ととらえて、かけ算に帰着して考えていく場面において生きて働くものとする。

このように、単元での生きて働く力は、教材を数学的にどのような価値があるかという観点で吟味することによって、明らかになってくるのである。

## (2) 子どもの論理の可能性

いかに教材が数学的に価値のあるものであろうとも、子どもの論理(見方・考え方)として理解可能なものであるかについても吟味されなければ意味が無い。また、どこまで子どもの論理として展開可能かについても吟味しなくてはならない。これは、数学的な価値を追求しつつ、子どもの論理の可能性も追求していくということである。具体的には、子どもが「何をもとにしているのか」と根拠を探ったり、「～とするとき、一はどう考えられるか」と仮設をたてて考えたりすることが可能かどうかについて吟味することである。

分数のたし算・ひき算の場合では、「何をもとにして、分数倍のたし算を決めるか」とたし算をきめる根拠を求めることができ、整数倍のたし算

を根拠にしていくことが明らかになる。

また、分数のひき算をたし算の逆としてとらえることにおいては、「分数倍のたし算を“いくつといくつ”の図で考えることができたとき、差はどのように考えられるか」と仮設をおいて考えることができる。その結果、ひき算は、たし算の図において、いずれかが？の時であるにとらえることになるのである。ひき算については、子どもの論理としてどこまで可能かも探ることになる。

このように、教材の数学的な価値と子どもの論理の可能性の二点から考えて単元の生きて働く力を設定するのである。

## Ⅱ 生きて働く力の要素とそのネットワーク

単元の生きて働く力の設定ができたら、その生きて働く力を身につけさせるためにどのように三段階を構成するかについて考えねばならない。

ここでは、三段階を構成するときに特に重要である生きて働く力の要素とそのネットワーク（関係）のとりえについて、先の分数のたし算・ひき算を例にして述べていくことにする。

### 1 生きて働く力の要素のとりえ

生きて働く力の要素とは、単元の生きて働く力を構成している知識・技能のことである。

先に述べた分数の単元でいうと、生きて働く力の要素は演算の意味理解と計算の形式の理解という二つの観点から次のように挙げられる。

#### ・演算の意味理解

- ①分数の和は倍のたし算である。
- ②分数のたし算（同・異分母）を図でとらえる。
- ③分数のひき算は、たし算の逆である。

#### ・計算の形式の理解

- ④分数のたし算の形式（ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\square + \triangle}{\bigcirc}$ ）
- ⑤分数のひき算の形式（ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{\square - \triangle}{\bigcirc}$ ）

生きて働く力の要素は、子どもの既存の生きて働く力から見方・考え方を変えずに意味づけられる要素Aと見方・考え方を変える（深める）ことによって意味づけることができる要素Bに分けることができる。このように要素について、子ども

の力で意味づけられるかどうかという観点で考えることにより、子どもの理解（わかり）にそうように単元の構成をしていくのである。

先の分数の場合、既存の生きて働く力は次の通りである。

- ・分数は二量の倍関係を表す。
- ・共通の単位のとり方により約分、倍分ができる。
- ・分数の大小を比べること（通分）ができる。

この生きて働く力から、見方・考え方を変えずに意味づけられると考える要素は、①②④⑤である。

これに対して、要素③は、子どもにとってはたし算とひき算は別物であり、ひき算をたし算に関係づけてとらえることはできないであろうと考えるので要素Bと位置づけられるのである。

### 2 ネットワークにおける見方・考え方

ネットワークするというのは、再構成段階において、既存の生きて働く力から、見方考え方をかえる（深める）ことによって、要素Bを意味づけることである。言い方をかえるならば、その単元の生きて働く力の要素の中でも核になる知識・技能を既存の生きて働く力や他の要素と関係づけることであるともいえよう。

分数の例で言うならば、子ども達は、たし算はたし算、ひき算はひき算で別であるという見方である。このような子ども達に、整数のひき算はたし算の逆と見れることに気づかせる。その結果、ひき算をたし算と関係づけて逆とみることにより、分数のひき算は、既に“いくつといくつ”で説明の出来るたし算をもとにして考えればよいというように、分数のひき算をたし算の図でとらえることができることになるのである。

ここでは、生きて働く力の要素とそのネットワークのとりえについて述べてきた。実際には、さらに、主体者としてかわる姿（単元を通して連続する子どもの意識）を想定し、子どもの意識を連続させていくための働きかけを考えて三段階を構成することが必要である。その結果、単元計画が出来上がるのである。この具体については以下の実践例の中の単元計画を参照して頂きたい。

### Ⅲ 主体者としてかかわる学習をめざして

#### 実践例1 5年 合同

##### 1 単元の構成について

##### (1) 生きて働く力の設定について

現行の合同の指導は、直線図形（三角形・四角形）を用いて学習をしている。このときの合同のねらいは、「対応する辺の長さ、対応する角の大きさがすべて等しいとき合同である。」ととらえることになっている。しかし、辺の長さが同じ、角の大きさが同じとき対応するということばを使ってはいるが、2つの図形の関係としての対応づけの意識は見られないように思う。

そもそも合同というのは、2つの図形の間に成り立つ関係のことである。従ってこの単元では、その関係について明らかにしていくような指導を組んでいくことを考えなければならない。

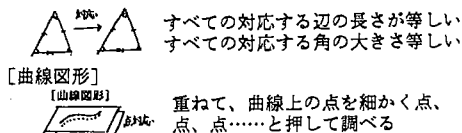
この単元での生きて働く力の設定については、Ⅱ章にあるように、数学的に価値ある知識・技能、さらに論理的に考えを進めていけるものの2点から考えていきたい。

そのために、私たちは、図形の構成要素として“点”を用いていくことにする。点を図形の構成要素とすることにより、次の2つの「数学的に価値のある知識・技能」が身につくと考える。

- ・合同の関係が曲線図形まで拡張できるようになる。
- ・2つの図形の間の対応づけについて深く意識づけることができるようになる。

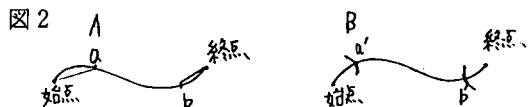
現行の内容のように、構成要素として、辺・角・頂点を用いた場合、三角形などの直線図形の合同の説明はできる。しかし、曲線図形についても合同の関係はあるにもかかわらず、その説明は出来ないものである。ここに、“点”を構成要素とすることの価値がある。というのは下の図のように、曲線の点の集まりとして見ていくことで、合同の関係を説明できるのである。

図1 [直線図形]



つぎに、対応関係を深く意識づけられることについて述べていくことにする。

現行のような直線図形同士の合同については、見た目で、直感的に対応づけができるが、本案では、対応づけの作業を必要とするのである。



上の図のように、2つの曲線はぴったり重なる合同である。そのときのきまりについて調べていくとき、対応する点として始点同士、終点同士は簡単に見込んでいくであろう。そして、Aの曲線の任意の点aに対して、対応する点a'をみつける。それは、始点や終点からの距離をもとにして対応づけていくであろう。つまり、図Aの始点からa、bまでの距離を調べてから、図Bの始点からそれらと等しい距離を、対応づけていくという経験を通して、対応することの意味が分かるのでないかと思われる。

このようにして“点”を図形の構成要素としたとき2つの数学的な価値が得られるのである。

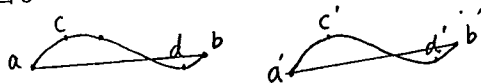
そして、このとき合同は次のように記述され、これが単元での生きて働く力となる。

2平面において、合同な関係にあるということは、任意の対応する点a、a'、b、b'の間に距離a bと距離a' b'が等しいときであることを知る。

このように生きて働く力を設定することで、曲線上以外にも点を考えていくと、平面と平面の関係まで考えていけるようになると思う。

また、構成要素として“点”でを用いて合同をとらえていくとき、次のような論理的に考えを進めていく場面が生じてくる。

図3



上の図のように、Aの曲線上の特定の点a、b、c、dを考え、それに対応するBの虚線上の点a'、b'、c'、d'から、a b、a' b'などの距離を対応づけをして、対応する距離が等しいきまりを見

つける。さらに、「どこでも対応する距離は等しくなるのか」という意識から、子ども達に、自分勝手（任意）に対応する距離を考えさせ、曲線図形の全ての対応する点についても成り立つだろうという意識にする。このことを何回か繰り返して、帰納法による推論（論理的に考えを進める）をすることで、2つの図形の合同について任意の対応する距離が等しいきまりをみつけていけるのである。

(2) 生きて働く力の要素とネットワーク

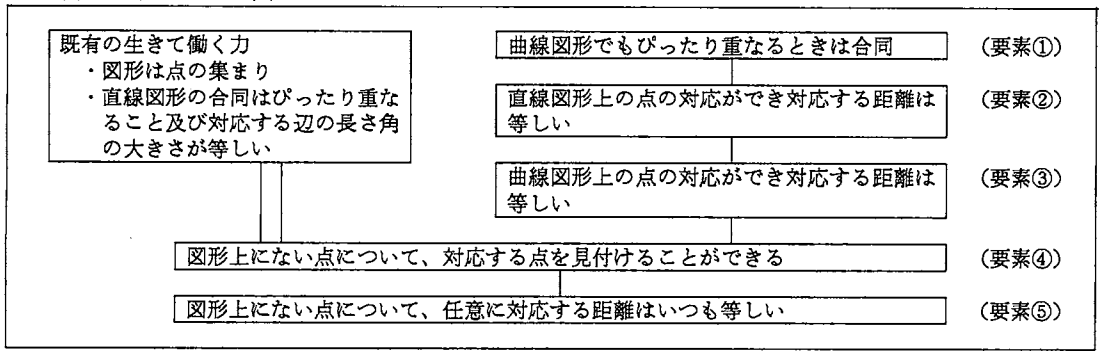
生きて働く力について分析してみると、次のような要素が考えられる。

[要素A群①②③について]

- ① 曲線図形についても、合同である条件はぴったり重なることがわかる。この要素については重ねてみるということによって体験しているので自分達で分かると思われる。
- ② 三角形、四角形などの図形上の点について対応する点  $p$ 、 $p'$  を見つけることができる。また対応する  $P_1P_2$  と  $P_1'P_2'$  には等しい関係が見つけられる。合同1の学習において、対応する辺の長さが等しいということは身についているので辺上の点については長さを認めていけるであろう。
- ③ 曲線図形においてその図形上の点について対応する点を見つけることができる。また対応する距離については等しい関係が見つけられる。曲線上の点の対応について、端点からの距離により見つけることができる。対応する距離についても測ることによって分かると思われる。

[要素B群④⑤について]

(4) ネットワーク図



④ 図形上にない点について対応する点を見つけてることができる。合同の形については、たとえ曲線の図形であっても認めることはできると思われるが、図形の外の点（平面上の任意の点）の対応についてまでの意識はないと思われる。

⑤ 図形上にない点について、任意に対応する点  $P_1P_2$  と  $P_1'P_2'$  には等しい関係があることが分かっても、図形の外の任意の点同士の距離にまでは目が向かないと思われる。

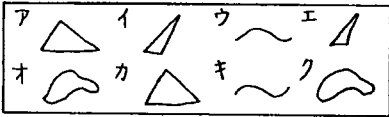
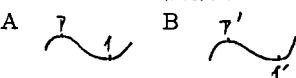
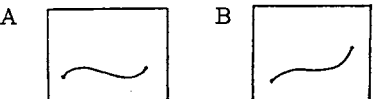
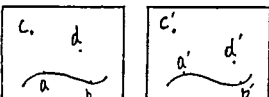
(3) 主体者としてかかわらせるために

子ども達は、直線図形の合同について、辺・角・頂点などの構成要素での理解をしている。そこで、曲線図形の合同まで考えていく本案では、主体者としてかかわる姿として、「対応する点をもとにして、合同のきまりを探ろうとする姿」を設定することにした。そのための働きかけとして、まず、獲得段階では、図形上の点同士の対応を考えさせ、対応する点はたくさんあることに気づかせる。しかし、点と点の距離を意識した対応ではないと思われるので、それらの点と点の間の距離を意識づけるために、きまりを探るための対応づけであったことに気づかせ、距離に目がいくようにしたい。

そして、再構成段階では、平面上の任意の点について、「曲線図形上の点以外に点はないか」と問うことで一般的な平面上の点にまで目を向けさせ、対応する距離の関係について意識させ、その距離はいつも等しいのではないかというきまりを見つけていくようにしたい。

このようにして、生きて働く力を身につけるように、次の単元構成を設定して指導していく。

(5) 単元計画 (総時数 6 時限)

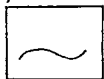
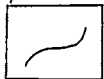
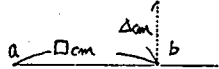

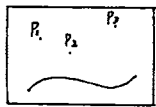
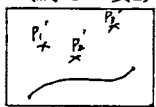
	児 童 の 主 な 意 識 の 流 れ	要素と働きかけ
獲得	<p>〈合同の形はどれどれかな (曲線図形も入っている)〉</p>  <p>アとカ ウとキ 合同 エとイは似ている オとクは全く違う……</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 曲線でもぴったり重なると合同の形といえる</li> <li>・ 重ねてみるとすぐ分かるよ</li> <li>・ 直線図形だと辺の長さや角度の大きさを決まりが言えたけど 曲線だと重ねるしかないのか</li> <li>・ 曲線でも言える合同の決まりを探ろう</li> </ul> <p>ぴったり重なればどんな形についても合同といってよい 曲線図形の合同の決まりを探ろう</p>	<p>要素A群①</p> <p>ぴったりとかさなることが合同の条件である</p>
再構成	<p>〈曲線図形の合同の決まりを探っていこう〉</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 対応する辺や角の外に何を考えることができるか</li> <li>・ 端の点に対応していると分かる</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 図形は点の集まりなので点の対応を考え決まりを見付けよう</li> <li>・ 曲線上の対応する点は端からの距離をコンパスで測る</li> <li>・ 対応する距離を測るといつも等しい</li> </ul> <p>曲線図形についても辺上に幾つか取った対応する点の間には アイ=ア'イ'のような等しい距離関係がある</p>	<p>要素A群②</p> <p>直線図形上に対応する点及び 合同のきまり</p> <p>働きかけ 1</p> <p>点と点との間に距離を意識させる</p>
適用	<p>〈2平面間の合同の決まりについて探っていこう〉</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 曲線以外にも点はないかな</li> <li>・ 平面上の点アに対応する点は端の点からの長さを測って見付けられそうかな</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 平面上の対応する点 対応する距離にも等しい決まりがある</li> </ul> <p>曲線の上になく対応する点の間についてもアイ=ア'イ'のような等しい距離の関係がある。</p> <p>〈2平面間の合同な形のきまりをもっとはっきりさせよう〉</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 対応する点はどこでもとることができる</li> <li>・ どの対応する点についても距離は同じになっている</li> </ul> <p>2平面間の合同のきまりは対応する点と点の任意の距離には等しいというきまりがある</p>	<p>働きかけ 2</p> <p>平面上に2点が決まっていれば 他の1点はコンパスを使って 見つけることができそうだ</p>
適用	<p>〈対応する点と合同のきまりを使って合同な形をかこう〉</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・ コンパスを使って対応する点の位置を決めてかくとよい</li> </ul> <p>曲線のところはとても大変だけれどもかくことができる</p>	<p>要素B群④</p> <p>図形上のない点の対応のさせ方</p> <p>働きかけ 3</p> <p>どこにでも自分勝手に対応する点を取って考えるようにする</p>
適用		<p>要素B群⑤</p> <p>対応する点を任意に取れしかも対応する距離は等しい</p>



## 2 授業（単元）の評価について

### (1) 再構成の1時の授業を中心にして

授業の流れは以下のようである。

学 習 の 流 れ	
(前の時間までのふりかえりをする)	
・今までは図の上での話でありそこまでのきまりであったことをまとめておく	
〈点のある合同な図形を仕上げよう〉	
(素材の提示)	平面上に点のある図形も びったり重なると合同図形 上の点については対応する 点が見付けられる
	
・図形の外にある点はどうか対応するかな	
平面上的点を含む合同の決まりを探ろう	
〈p1に対応する点を重ねないで見付けよう〉	
[aとbを結んで]	[コンパスを使って]
・aからの長さ bからの長さ をものさしで適当に測って	
 	
(空間の点の位置の考 書き方を思い出す)	
え)	
コンパスを使って両端からの距離を測ると対応する点が決められそうだ (※学びの姿1)	
〈他に対応する点をとって合同のきまりを探ろう〉	
・もう対応する点は簡単にとることが出来るよ	
・図形外の距離について考えきまりを探っていく (※学びの姿2)	
	
・操作して今までの学習を生かしてきまりを見つけ ていく	
・ $P_1P_2 = P_1'P_2'$ $P_1P_3 = P_1'P_3'$ になっているようだ	
図形上にない対応する点は両端の対応する点 からの距離をコンパスで測って取ることができ る	
また 対応する距離も等しい	
・対応する距離はいつも同じかな 今度調べよう	

### (2) 授業の実際と考察

ここでは、再構成の授業を中心にして、学びの姿の表れ、また、そのことによって、ねらいについて到達されていたかの2点についての考察をしていくことにする。

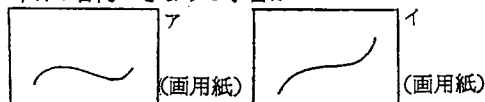
まず、この授業のねらい及び学びの姿と大まかな授業の流れについて記述しておきたい。

授業のねらいは、「曲線上にない平面間の対応する点についても対応する距離は等しいことを見付けること」である。また、学びの姿は2つあり、1つは、平面同士重ねないで対応する点を見つけようとする姿、もう1つは合同のきまりを見つけようとする姿である。

以下、コメントを少し交えながら、授業の流れについて記述していきたい。

(素材の提示の場面では、平面について意識させるため前時までの曲線図形が片方だけ少し斜めにしておいた。それは前時と本時の違いから、児童が今こまでの知識を身につけているかが分かるからである。)

T: 今日の合同のきまりの学習は



です。さあ、今日も合同のきまりを見つけられるかな。

C: 昨日の合同の曲線と同じでないですか。

C: イの図が斜めになっているだけで、合同だよ。

・・・略・・・

(次に、本時の課題に至るためにアの画用紙全体とイの画用紙全体をなぞって)

T: きょうのこれアとこれイは合同とっていいですか。

C: 先生は曲線の外のことまで言っているのですか。

C: ザワザワ……意味が分からない。

(教師としては、平面と平面の関係について意図しているが児童には平面に意識がないと考えられるので、次の発問を用意した。)

T: アの曲線以外のところに点があるよ。イと合同とっていいかな。

C: イにも点があれば合同と言えるけど、なければ合同とは言えない。

T: では、今日の課題として(板書)曲線上にない点のある図形についても合同と言えるようにしましょう。アの点a(と記号をつける)は、イのどのあたりにある。

C<sub>9</sub> イはななめなので画用紙の所にないかも知れない。

C<sub>9</sub> (指をさして) その辺りじゃないかな。

C<sub>10</sub> 1cmマスを全部かくとその位置が分かる。

C<sub>11</sub> 曲線を合わせて上から写せばいい。

C<sub>12</sub> コンパスを使えば分かる。

(プリントを配る)

(このとき机間巡視してみると、ほとんどの児童ができているようであったので、合同のきまりを探ろうとしているか確めるためには、つぎの発問をすることにした。)

T<sub>7</sub> 対応する点を1つ見付けたら、合同のきまりが言えるか。

以下、各グループで考えることにした。

グループで考えた結果、次の2つの意見に別れてこの授業は時間がきた。あるグループでは、「対応する点は1つだけ調べればいい。その理由はアの外の点は適当に打った点なので、2つ、3つと増やしても同じである。」

また、あるグループは、「対応する点と対応する距離を考えると、たくさんあった方がよいのではないか。」のそれぞれの考えがだされた。

以上が大まかな授業の流れであった。このような流れをもとに学びの姿を中心に考察していきたい。

まず、学びの姿の1については、ほとんどの児童が、曲線上以外の点についても作業していたことから、姿の表れはあったと思われる。これは、獲得の授業で曲線上の点についてコンパスを使って任意の点をとる作業が生きていたのである。

また、学びの姿の2についてはその表れはなかったと思われる。教師としては子ども達一人ひとりが平面上に点をたくさんとって、対応する距離を全部調べていくとよいのではないかと意識をもってくれるのではないかと考えていた。そのためT<sub>7</sub>の発問をきっかけに、平面上の合同のきまりまで考えるのでないかと期待した。しかし、子ども達は、いくつかの対応する点を見つけるには見つけたが、曲線上にない平面上の点と点や距離の対応までの意識が見られなかった。

このように、曲線上以外の平面までの意識がな

かったのは、T<sub>3</sub>～T<sub>4</sub>に至るまでの授業記録からも考察できるように、学習課題が子ども達にとってはっきり理解できていなかったのである。

そのため、平面と平面の関係として合同をとらせるねらいであったにもかかわらず、子ども達の戸惑いが次のように見られた。

「画用紙全部を指さして、先生はこれとこれと言っているのですが、昨日の問題とは違うのは何と無く分かったけれど、何と何をどうしていいのかわからず、どう考えていいのか迷ってしまった。」

これらのことから、学びの姿にまでいく意識がなかったのは、学習課程の設定にあると考えるのである。この時点からもう本時のねらいまで到達しなかった。子どもにとって、平面と平面の関係までの意識づけはとても難しいことであると言える。

### (3) 単元全体を通しての考察

獲得段階の授業では、子ども達は曲線同士の合同ということで、かなりの興味をもって、合同のきまりを探っていた。子どものノートにも、「コンパスを使うとたくさんの対応する点をとれて、対応する距離はどこでも同じだった。当たり前のような気がするけれど……」などとまとめられている。このことから、獲得段階では、子ども達は図形を点の集まりと見ることができ、点の対応による合同のきまりを探ろうとする姿があったといえる。

再構成の段階については、授業記録の最後の場面にあるグループの発言から、子ども達の合同のきまりについての第2時の意識から考えてみる。

子どもは、「昨日の授業のように、対応する距離を見つけるために、曲線上のほかにもいくつかの点を勝手にとって、対応する距離を調べていくと合同のきまりが見つかる……」の反応を示している。この点から言えば、児童は任意の点の対応を意識して合同のきまりをとらえている。

つまり、47ページにある要素①～⑤はある程度ネットワークされたと考えられる。

最後に反省として、学びの姿を考えた授業の組み立てをすることで、もっと連続する追求意識になるような学習課題を設定して、生きて働く力を身につけるように考えていきたい。

## 実践例2 1年 いろいろなかたち

### 1 生きて働く力の設定

本単元の生きて働く力を次のように設定した。

形もものの属性であるから、材質・色・大きさなどを捨象して、ものの形として認めていく。その上で、図形の構成要素の数に着目して図形の特徴を知ること。

この生きて働く力を教材の価値、子どもの意識の二面から考えてみることにした。

教材の価値を考えてみるに、例えば、子ども達に数をとらえさせるとき、例えば、子ども達に数をとらえさせるとき、男女、大人子ども、位置に関係なく、5人の人間を数える場合に、5の数字を対応させてきた。また、色、大きさ、形、材質の違う5個のボタンを数える場合にも、5の数字を対応させてきた。つまり、ものを数える指導において、ものの属性を捨象して数1、2、……を与えてきたのである。

形もものの属性であることから、図形の指導においても、数の指導と同じように、材質、色、大きさなどを捨象して、ものの形を抽象して、同じ形や違う形と認めていく、そのような見方（ものの属性を捨象して同じ形と認める）が重要であると考えた。

このようにものの属性を捨象して、ものの形を抽象して見ることは、基本図形をその構成要素「かど」「へり」の数でとらえさせることになり、「へり」が3つあるから「さんかく」、「かど」が4つあるから「しかく」など、基本図形の形とその特徴を知らせることになると考えた。

次に、生きて働く力を子どもの意識の面から考えてみる。それは、大きく次の2つの姿として表れる。

- ・色、大きさなどに関係なく、図形をしかく、さんかく、まるに仲間分けできる。
- ・図形の「へり」や「かど」の数で、しかく、さんかく、まると言える。

子ども達は、大きさや色、材質の違う「さんかく」を、同じ「さんかく」の形と見るなどの経験はある。このことから、図形の色、大きさを捨象

して、同じ形と認めることはできると思われる。しかし、「同じ正方形で置かれた位置が異なると、同じ図形と認めることはできない」など、位置については、少なからず抵抗があると思われる。

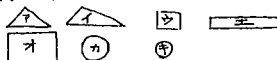

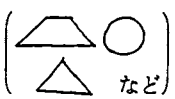

このような子ども達に、ひとつ目の姿をねらう。そのためには、図形をずらしたり、まわしたりして見せることで、位置に関係なく、いろいろな色、大きさ、材質の基本図形を仲間分けするという作業をさせる。このことで、ものの属性を捨象して、形という観点でも、仲間分けができ、図形を同じ形と認めることができることを知ることになる。

もうひとつの姿を考える。考える前に、算数科の理論編を振り返ってみたい。そこでは、教科の本質を「数理の世界において、論理的に考えを進めること」とある。また、生きて働く力（知識・技能）は、論理的に考えを進めていくに耐えうるものでなければならない。単なる知識・技能ではなく、論理的に考えを進めていく上で生かされる知識・技能であって、はじめて生きて働く力となると述べている。

それでは、ここでの生きて働く力は、子どもの姿レベルではどのようなものなのであろう。それは、「～ゆえに～だ」となる。もう少し具体的に述べるならば、「へりやかどが3つあるからさんかくだ」と言えることなのである。

このように言えるためには、まず、形という観点で分けた基本図形は、構成要素「へり」「かど」の数が同じということをとらえさせる。また、その構成要素の数で図形を「さんかく」「しかく」「まる」と仲間分けできることを知らせる。さらに、手探りによって周りをなぞり、「かど」「へり」などの構成要素に着目し、その数をかぞえ、図形を仲間分けさせる。このように、視覚だけでなく感覚によるなど、多様な体験をすることで、図形を同じ形と認める視点として、構成要素「へり」「かど」の数に着目させる。そして、その着目の過程において、「～ゆえに～だ」という論理的言い回し方を身につけさせ、基本図形の特徴を知らせるのである。

## 2 単元計画 (総時数 5 時限)

	児 童 の 主 な 意 識 の 流 れ	要素と働きかけの位置づけ
獲得	<p>〈身の回りの物の平らな部分を写し取ってみよう〉</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>教科書を写し取ってみよう ・ 筆箱を写し取ってみよう</li> <li>ノート、積み木、さいころを写し取ってみよう</li> </ul> <p>しかく、まる、さんかく、ながしかく、いろんな形が写し取れた</p> <p>〈写し取ったいろんな図形を仲間分けしてみよう〉</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>色で分けられる ・ 大きさでも分けられる</li> <li>材質で分けてみよう ・ 図形を形で分けてみよう</li> <li>色、大きさ、位置、素材などは関係なく分けられる</li> </ul> <p>さんかくの仲間はアイだ しかくの仲間はウエオだ まるの仲間はカキだ</p> <p>〈さんかく、しかく、まるでは、どんな違いがあるだろう〉</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>とがったところ「かど」が、あるのとないのがあるよ</li> <li>「へり」も、あるのとないのがあるよ</li> <li>「へり」「かど」の数が、形によって違うよ</li> </ul> <p>さんかくはかどが3つ しかくはかどが4つ まるはない へりは さんかくは3つ しかくは4つ</p>	<p>要素A群①</p> <p>基本図形を写し取る</p> <p>働きかけ 1</p> <p>図形をずらす、まわす、など移動させ、位置を変えて同じ形と見せる</p> <p>要素A群②</p> <p>捨象して同じ形と見る</p> <p>働きかけ 2</p> <p>図形の形の違いを聞かせる</p> <p>要素A群③</p> <p>基本図形の特徴を知る</p>
再構成	<p>〈色々な形を仲間分けしてみよう (視覚)〉 前時までの復習</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>さんかく、しかく、まるの仲間だ</li> <li>〈図形を見ないで仲間分けするにはどうしたらよいだろう〉</li> <li>手触りで、「へり」「かど」の数をかぞえればできる</li> <li>〈いろんな形を触って仲間分けしよう〉 一斉学習</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>まる さんかく しかくがありそうだ</li> <li>4つの「へり」「かど」があるのは、しかくだ ～はさんかくだ</li> <li>△や□の形も「へり」「かど」が4つあるからしかくの仲間だ</li> </ul> <p>〈一人ひとり手触りでやってみよう〉 個人学習</p> <p>素材</p>  <p>体育袋にいくつかの図形を入れる さんかくは2つ しかくも3つ まるは2つ 「へり」「かど」の数で分けれたよ</p> <p>触ってやっても、図形の「へり」や「かど」の数を考えれば仲間分けはできるよ</p>	<p>働きかけ 3</p> <p>実際に触り弁別する操作を体験させる</p> <p>要素B群④</p> <p>構成要素に着目し、図形の特徴を知る</p>
適用	<p>〈ひごやひもゴムを使って「さんかく」「しかく」「まる」を作ってみよう〉</p>  <p>3つのひごで「さんかく」ができた ひもでもゴムでも「さんかく」ができた</p>	<p>働きかけ 4</p> <p>ひごやひもを使って、形作りをさせる</p>

### 3 授業の実際の考察

ここでは、授業の実際を述べながらも、子どもの意識の流れを中心に、いかに学びの姿が形成され、ねらいが達成されたかについて考察する。

まず、授業のねらいと授業構成の意図を述べる。

授業のねらいは、「触角で図形を形の観点で弁別するときも、図形の構成要素の数に着目すれば分けることができることを知る」である。

また、授業構成の意図は、次の通りである。前時までは、視覚による仲間分けである。子ども達は、「かどが3つあるからさんかく」など、「～だから～だ」の言い回しはある程度できている。しかし、視覚での仲間分けは、見えてしまうために直感的図形の把握であり、図形の構成要素への着目が弱いと考えられる。本時で触角を扱うのは、同じ形と認めるには、図形の構成要素に着目すれば良いことを、より強めたいからである。ここでの強めたいの意味は、構成要素への着目の教科と構成要素「かど」の概念形成のふたつである。後者を具体的に言えば、直角でないかどもしかくのかどに含まれることが分かることである。

次に、授業の実際の子どもの意識を中心に述べる。

はじめの授業場面は、基本図形の視覚での仲間分けであり、前時までの復習である。(単元計画を参照) 子ども達は、前時までの学習を生かし、色、材質、形、大きさなどの観点を挙げ、実際に仲間分けをした。そして、学習済みということもあって、安心して積極的に取り組んでくれた。

視覚で仲間分けしてきた子ども達に、

T<sub>1</sub> 今まで見て仲間分けしてきたが、見ないで仲間分けできないかな

C<sub>1</sub> えー(しばらく沈黙が続いたが)

C<sub>2</sub> 目をかくして、手触りで C<sub>3</sub> 手さぐりで

T<sub>2</sub> 手触り、手さぐりってどんなことなの

C<sub>4</sub> 目をかくして、手でかどやへりを触って調べる

T<sub>3</sub> 〈手触りで仲間分けしよう〉 板書

C<sub>5</sub> (○の形を触って) まるです

C<sub>6</sub> (△や□を触って) さんかく しかくです

T<sub>4</sub> 目をつむっているのに、どうしてさんかくやしかくと分かるの

C<sub>7</sub> かどを触れば分かるよ

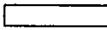
C<sub>8</sub> 触ってかどの数をかぞえれば分かるよ

C<sub>9</sub> まず、ひとつの手ではじめのかどを触って、あとの手で順に触っていけば分かる

この時点での教師の意図は、「～だから」の部分、構成要素への着目を強めることである。つまり、視覚で漠然と見てきたものを、触角でより確かなものにするのである。

このことについては、T<sub>4</sub>の働きかけにより、C<sub>7</sub>～C<sub>9</sub>の反応が見られたように、構成要素への着目の強化はなされた。そして、子どもの意識は、「かどの数が分かれば、形が分かる」という思いになった。

この意識になった子ども達に、次にねらうことは、論理につなげることである。


T<sub>5</sub> それでは、は C<sub>10</sub> しかく

T<sub>6</sub> かどが4つあるからしかく

T<sub>7</sub> ○・△・□ は……

ここでの教師の意図は、「～だから～だ」の論理的言い回しを身につけさせることである。その方法として、幾つかの図形を提示し、その言い回しに慣れさせていった。

次の学習場面でのねらいは、図形の構成要素「かど」の概念を形成することである。特に、ましかくやながしかくなどの直角だけが、しかくのかどであるという概念を砕くことにある。

T<sub>8</sub> は、 C<sub>12</sub>さんかく C<sub>13</sub> しかく

C<sub>14</sub> さんかくに見えるけど、かどが4つあります。

だから、しかく

C<sub>15</sub> でも、かどがとがっているから、しかくでない

T<sub>9</sub> そうだね、とがっているからかどとはいえないね

C<sub>16</sub> とがっていても、かどと言っている

ここでの教師の願いは、「さんかくのかどは、とがっていてもかどと言うのだから、しかくのかどだって、とがっていてもかどと言っている」と、発言してくれるのを期待していた。しかし、そこまでの子どもの意識の高まりはなかった。でも、T<sub>9</sub>に見られるように、教師の揺さぶりにも負けず、C<sub>16</sub>のような発言が多く見られるようになっていった。そこでは、しかくのかどは直角であるという、今まで子ども達が持っていたしかくのかどの概念を砕くことはできたと思われる。

ここでの子ども達は、「触覚による構成要素への着目を強めること」「～だから～だという、論理的言い回し」「かどの概念形成」という3つの知識を理解したことになる。

この3つの知識を得た子ども達は、次の学習場面へと進んでいった。この場面では、構成要素「かど」に着目して、図形の仲間分けを個人作業としてできることがねらいとなる。また、学びの姿「図形の構成要素の数に着目し、触って図形を弁別しようとする姿」が見られるかどうかが問題になってくる。

3つの知識を得た子ども達は、個人作業になっても、「△これは、かどが3つあるからさんかく」「□これは、かどが4つあるからしかく」など、一人ひとり積極的に学習に取り組んでくれた。つまり、3つの知識の理解は、子どもの学びの姿を達成させるものであり、本時のねらいも達成させるものであった。

このように、本時（再構成）の学びの姿ができ、ねらいが達成されたわけを単元全体に振り返って考えてみたい。

それは、獲得段階で次のようなことに留意していたからであると思われる。

- ・身のまわりの具体物から、形を写し取る。このような作業で図形への興味付けをはかり、追求の意欲を持たせた。
- ・図形の仲間分け（視覚）の学習で、色、大きさを捨象して、形という観点で分けることを大切に扱った。
- ・「へり」「かど」、図形の構成要素に着目させて、仲間分けをさせた。また、「～ゆえに～だ」の論理的な言い回しにふれた。

以上のような学習が、本時の追求の基礎となり、ねらいが達成されたとみられる。また、本時での知識が、適用的段階へと生かされていったと考える。

## おわりに

私たちは、教科として、「何を」「どのように」指導すればよいかに重点をおいた研究をしてきた。そして、ここに、その2つの点から反省を試みたいと思う。

まず、1点目の「何を」を考えることは、私たちに「教科の生きて働く力は何か」「その教材には、どのような数学的価値があるか」という視点での教材研究を要求することになった。この要求は、算数科理論編「教科での生きて働く力とは、

公理的方法に基づいて考えを進めて得る数学的な知識・技能」に見られるように、算数科では何をこそ指導すべきか、もう一度理論的に研究する契機を与えてくれた。また、教材の数学的価値を問うことは、算数科が七年前より、金沢大学の宮下英明先生と共に教材化の研究を進めてきたことと合致し、更に、研究を進めることができた。

しかし、2点目の「どのように」を考えることは、結論から言って、まだまだ研究の未熟さを自覚せざるを得ないものであった。私たちは、現行の指導を見つめ、教材の数学的価値はどうあるべきかを考えたとき、「分数を比」「相似、合同を点の対応関係」などととらえてきた。このとらえ直しは、教材の本質を問うことであり、大変時間のかかるものであった。また、このような数学的価値のある教材を指導案化し、子どもの意識の流れに乗せることは、数学的価値がいつも子どもの意識に合うとは限らないということから、時間のかかる、難しい作業であった。

私たちはこれからも、教材の価値(魂)を失わないように、しかも、できる限り、子どもの意識に乗るように教材化を考えていきたいと考えている。

## 引用・参考文献

- 菊池兵一：「これからの算数教育の動向をさぐる」
- 中島健三：「算数・数学教育と数学的な考え方」金子書房 1981
- 杉山吉茂：「算数・数学的な考え方を育てる授業」教育開発情報センター1989
- 「公理的方法に基づく算数・数学の学習指導」東洋館 1986
- 宮下英明：「算数科“数と計算”領域教材研究 分数(1)：“分数”の意味：現行の分数指導体系」金沢大学教科教育研究 第23号 1987
- 宮下英明、長島莞一、松島修、藤森慎一：「算数科“数と計算”領域教材研究 分数(2)：教材化の理論」金沢大学教科教育研究 第23号 1987
- 「算数科“数と計算”領域教材研究 分数(3)：カリキュラム」金沢大学教科教育研究 第23号 1987
- 宮下英明：「算数科“図形”領域教材研究—“空間”の教材化(1)」金沢大学教科教育研究 第26号 1987
- 宮下英明、卜部義夫、長島莞一、松島修：「算数科“図形”領域教材研究—“空間”の教材化(2)」金沢大学教科教育研究 第26号 1987
- 「算数科“図形”領域教材研究補遺 “相似”の指導」金沢大学教科教育研究 第26号 1990